

Комбинаторика

Программа курса:

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения. Принцип Дирихле. Примеры.
2. Формула включений и исключений. Примеры.
3. Факториал. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона.
4. Сочетания с повторениями. Полиномиальная формула.
5. Свойства чисел сочетания: доказательство знакопостоянных тождеств. Треугольник Паскаля.
6. Частный случай формулы включений и исключений. Доказательство знакопеременных тождеств.
7. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга (б/д).
8. Функция Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса.
9. Применение формулы Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.
10. Основы комбинаторики разбиений: примеры задач.
11. Разбиение чисел на слагаемые. Доказательство рекуррентных соотношений.
12. Разбиение чисел на слагаемые. Диаграммная техника.
13. Разбиение чисел на слагаемые. Формула Эйлера. Формула Харди-Рамануджана (б/д).
14. Общая теория рекуррентных соотношений. Простейшие примеры.
15. Числа Фибоначчи: различные модели возникновения задачи, рекуррентное соотношение, теорема о представлении чисел Фибоначчи в виде суммы чисел сочетания.
16. Выравнивание последовательностей: рекуррентная формула для числа выравниваний $f(n, m)$; асимптотика (б/д). Рекуррентная формула для числа выравниваний $g(n, m)$; явное выражение, асимптотика. Формула Григгса для $h(r, n)$ (б/д).

17. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Общий вид решения в случае, когда все корни характеристического многочлена различны. Числа Фибоначчи.
18. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристический многочлен. Общий вид решения в случае, когда у характеристического многочлена есть кратные корни.
19. Правило деления многочлена на многочлен. Возникновение и определение формального степенного ряда.
20. Сложение, умножение и деление формальных степенных рядов. Теорема об области сходимости степенного ряда (б/д).
21. Понятие о производящей функции последовательности. Примеры применения техники степенных рядов и производящих функций для доказательства комбинаторных тождеств. Числа Фибоначчи.
22. Общий ряд Ньютона (б/д). Частный случай ряда Ньютона для функции $\sqrt{1+x}$ (разные виды записи).
23. Числа Каталана: рекуррентное соотношение и его решение с помощью техники степенных рядов и производящих функций.
24. Общее понятие о графе. Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. Задача Кэли о структурных химических формулах.
25. Формальное определение графа, мультиграфа, псевдографа и орграфа. Примеры. Изоморфизм графов. Перечисление попарно неизоморфных графов на четырех вершинах.
26. Понятие о планарности графов. Гомеоморфизм графов. Графы K_5 и $K_{3,3}$. Подграфы. Теорема Понтрягина - Куратовского (б/д).
27. Маршруты в графах: цепи, циклы и т.д. Связность графа, компоненты связности. Степень вершины. Формула для суммы всех степеней вершин графа.
28. Эйлеров цикл. Критерий эйлеровости графа (три эквивалентных утверждения). Решение задачи о кёнигсбергских мостах.
29. Теорема о семи эквивалентных определениях дерева. Лес.
30. Разбиения чисел на слагаемые и их реализация с помощью графов (графичность разбиений). Алгоритм проверки разбиения на графичность и построения графа, отвечающего графичному разбиению (б/д). Критерий графичности разбиения (б/д).
31. Формула Кэли для числа всех (помеченных) деревьев на n вершинах. Решение задачи о структурных химических формулах. Понятие об унциклическом графе. Формула и асимптотика для числа всех уни-циклических графов на n вершинах (б/д).
32. Определение клики и множества независимости в графе. Графы K_n и $K_{n,m}$. Размер максимальной клики в графе ($w(G)$) и число независимости графа ($a(G)$).

33. Определение гиперграфа. Пример связи задач о гиперграфах с задачами о графах: построение так называемого "графа пересечений", отвечающего гиперграфу, и описание некоторых свойств этого графа в терминах свойств гиперграфа (связность, значения $w(G)$ и $\alpha(G)$). Теорема Эрдеша - Ко - Радó (б/д).

34*. Понятие метрического пространства. Расстояние между последовательностями, рекуррентная формула для подсчета этого расстояния и оценка сложности такого подсчета.

35*. Понятие о случайном графе.

36*. Последовательности де Брёйна.