

Линейная алгебра

Лектор – доцент **Чубаров И.А.**

Программа курса:

1. Системы линейных уравнений 2-го и 3-го порядков. Определители 2-го и 3-го порядков, правило Крамера решения системы линейных уравнений.
2. Системы линейных уравнений (общий случай). Алгоритм Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Общее решение неоднородной системы.
3. Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства этих операций.
4. Умножение матриц и его свойства. Транспонирование матриц.
5. Определитель квадратной матрицы. Свойства определителей. Миноры, алгебраические дополнения, разложение определителя по элементам строки и столбца. Фальшивое разложение. Формула полного разложения определителя. Способы вычисления определителей.
6. Решение и исследование квадратной системы линейных уравнений по правилу Крамера.
7. Вычисление определителя матрицы с углом нулей. Определитель произведения двух квадратных матриц.
8. Обратная матрица. Критерий существования и формула обратной матрицы..
9. Элементарные матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матричные уравнения $AX = B$, $XA = B$.
10. Векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над ними. Базис, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Разложение вектора по базису на прямой, плоскости и в пространстве.
11. Радиус-вектор точки. Декартова система координат. Полярная, сферическая и цилиндрическая системы координат*. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении. Применения: середина отрезка, медиана треугольника, биссектриса треугольника.
12. Скалярное произведение двух векторов, его свойства и вычисление в координатах. Выражение ортогональной проекции одного вектора на другой.
13. Векторное произведение двух векторов, его свойства и выражение в координатах. Критерий коллинеарности двух векторов.

14. Смешанное произведение трех векторов, его свойства, выражение в координатах. Объем ориентированного параллелепипеда. Критерий компланарности трех векторов.
15. Прямая на плоскости. Векторное параметрическое и нормальное уравнения прямой. Различные формы уравнения прямой в координатах: каноническое, через две точки, с угловым коэффициентом. Вычисление угла между прямыми и расстояния от точки до прямой.
16. Прямая в пространстве. Векторное параметрическое уравнение прямой. Координатные формы уравнений прямой: параметрические, канонические, по двум точкам. Вычисление расстояния между параллельными и скрещивающимися прямыми. Задание прямой как линии пересечения двух плоскостей.
17. Плоскость в пространстве. Векторное параметрическое и нормальное уравнения плоскости, запись уравнения с помощью смешанного произведения. Координатные формы уравнения плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями, расстояния между параллельными плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости в пространстве.
18. Арифметическое векторное пространство (столбцов или строк): его размерность, примеры базисов. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Вычисление ранга с помощью элементарных преобразований. Базисный минор. Вычисление ранга методом окаймления миноров. Критерий равенства определителя нулю.
19. Фундаментальная система решений и общее решение однородной и неоднородной системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли и ее следствие.
20. Линейное (векторное) пространство. Аксиомы, их простейшие следствия. Примеры. Базис, размерность, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса.
21. Подпространства в линейном пространстве. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Задание подпространства системой линейных уравнений. Сумма и прямая сумма подпространств.
22. Евклидово пространство (пространство со скалярным произведением). Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис, алгоритм ортогонализации (Грама-Шмидта). Ортогональная проекция вектора на подпространство, расстояние и угол между вектором и подпространством. Метод наименьших квадратов*.
23. Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения. Матрица линейного оператора и ее изменение при замене базиса. Действия над линейными отображениями*.
24. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора и матрицы. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду путем перехода к базису из собственных векторов.

25. Билинейные функции, их матрицы. Изменение матрицы билинейной функции при замене базиса. Симметрические билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа). Закон инерции квадратичных форм (формулировка). Положительно определенная квадратичная форма, критерий Сильвестра.
26. Линейные операторы в евклидовом пространстве: самосопряженные (симметрические) и ортогональные, их свойства и свойства их матриц. Приведение квадратичных форм к диагональному виду (к главным осям) при помощи собственных значений и ортогональной замены координат.
27. Линии второго порядка на плоскости, заданные каноническим уравнением. Приведение уравнения линии второго порядка на плоскости к каноническому виду. Эллипс, гипербола, парабола. Асимптоты гиперболы. Касательная к эллипсу, гиперболе, параболе.
28. Поверхности второго порядка в трехмерном пространстве, заданные каноническим уравнением. Эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды. Цилиндрические поверхности и конус 2 порядка. Поверхности вращения. Упрощение уравнения поверхности (линии) второго порядка методом выделения квадратов и с помощью собственных векторов.
29. *Графы, связанные с ними матрицы. Спектры графов. Применение к структурной теории молекул.

Литература:

- **Основная:**

1. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М., 2006. (Имеется Word-файл).
2. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2003.
3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– М.: Физматлит, 2003 (первое издание: М.: Наука, 1987). (Имеется файл в формате djvu)
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.І.

- **Дополнительная:**

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.– М.: Наука, Физматлит, 2000. (Имеется файл в формате djvu)
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Т.1. Аналитическая геометрия. Т.2. Линейная алгебра.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. Ч. II. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2000 – 2005.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука. (Имеется файл в формате djvu).
5. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003.