Программа курса математического анализа

Лектор – профессор В.В.Власов

1 семестр

1. Понятие функции. Способы задания функции. Сложная функция, обратная функция. График функции.
2. Предел функции; ограниченность функции, имеющей предел, связь с бесконечно малыми. Единственность предела. Формулировка критерия Коши существования предела функции.
3. Предел суммы, разности, произведения и частного.
4. Переход к пределу в неравенствах, теорема о сохранении знака. Теорема о «зажатой переменной».
5. Предел сложной функции, предел обратной функции.
6. Непрерывные функции. Локальные свойства непрерывных функций.
7. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

8. Эквивалентные, их свойства, таблица эквивалентных. Примеры.
9. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Свойства пределов числовых последовательностей. Примеры. Формулировка критерия Коши существования предела последовательности.
10. Дифференцируемость функции одной переменной, связь с непрерывностью и производной. Дифференциал.
11. Правила дифференцирования, производная сложной функции, обратной функции, функции, заданной параметрически.
12. Таблица производных простейших элементарных функций.
13. Геометрический смысл производной, касательная к графику функции.
14. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
15. Признак экстремума функции, признаки возрастания, убывания функции. Примеры.
16. Старшие производные. Признак выпуклости функции. Точки перегиба.
17. Асимптоты к графику функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные). Построение графика функции.
18. Вектор-функция скалярного аргумента. Предел, непрерывность, производная.
19. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей 0/0 и ∞/∞. Формула Тейлора. Примеры.
20. Формулы Тейлора для простейших элементарных функций.
21. Первообразная функции. Неопределенный интеграл.
22. Таблица первообразных элементарных функций.
23. Свойства первообразных. Формула интегрирования по частям. Примеры.

2 семестр

1. Интеграл Римана. Необходимое условие интегрируемости. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства.
2. Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману. Классы интегрируемых функций.
3. Интегрируемость по подотрезкам, аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость кусочно непрерывной функции.
4. Интегрируемость произведения, интегрирование неравенств, интегрируемость модуля функции, интегральная теорема о среднем.
5. Интегралы с переменным пределом интегрирования, формула Ньютона-Лейбница.

6. Замена переменного в интеграле Римана и интегрирование по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
7. Геометрические приложения интеграла Римана.
8. Метрические пространства, $\mathbf{R}^n$, неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве.
9. Компакты в метрическом пространстве. Компакты в $\mathbf{R}^n$.
10. Полные метрические пространтсва. Полнота $\mathbf{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса для компактов метрических пространств.
11. Предел и непрерывность функций многих переменных и их свойства. Функции, непрерывные на множестве, и их свойства.
12. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
13. Дифференцирование сложной функции. Свойства дифференциала. Производная по направлению, градиент. Геометрический смысл дифференциала.
14. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Дифференциалы высших порядков.
15. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано. Экстремумы функций многих переменных, необходимое условие локального экстремума.
16. Достаточное условие локального экстремума.
17. Теорема о неявной функции. Уравнение касательной и нормали к заданной неявно кривой.
18. Теорема о неявном отображении. Матрица Якоби композиции. Условный экстремум.
19. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Необходимое условие сходимости.
20. Числовые ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения. Признаки Даламбера и Коши.
21. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютно сходящиеся числовые ряды. Признаки Дирихле и Абеля (без доказательства).
22. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.
23. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.
24. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность предельной функции и суммы ряда. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда. Теорема о почленном дифференцировании (без доказательств).
25. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.